Poziţia relativă a două drepte. Sisteme de ecuaţii de tipul,

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}, a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}$$

Fie sistemul

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}, a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}$$

Necunoscutele din sistem sunt x, y, numerele a,b,m,n coeficienţii necunoscutelor, iar c, p sunt termenii liberi. O pereche de numere reale(x,y) care verifica simultan cele doua ecuaţii se numeşte soluţie a sistemului.

Mulţimea soluţiilor sistemului este $S=\{(x,y) | ax+by=c \text{ şi } mx+ny=p\}$.

Sistemul poate să admită soluţie unică(**sistem compatibil determinat**), o infinitate de soluţii(**sistem compatibil nedeterminat**), nici o soluţie(**sistem incompatibil**).

Rezolvarea unui sistem de două ecuaţii cu două necunoscute se realizează prin două metode: metoda reducerii şi metoda substituţiei. Reamintesc cu ajutorul elevilor cele două metode.

METODA SUBSTITUŢIEI: din una din ecuaţii se scoate o necunoscută, se introduce necunoscuta scoasă în a doua ecuaţie, se afla valoarea necunoscutei, cu valoarea aflată se revine la prima ecuaţie şi se determină a doua necunoscută.

METODA REDUCERII:se înmulţesc termenii ecuaţiilor astfel încât prin adunarea sau scăderea egalităţilor sa se anuleze termenii ce conţin una din necunoscute, se rezolva ecuaţia cu o singura necunoscuta obţinută, se înlocuieşte valoarea necunoscutei aflate într-una dintre ecuaţiile , se rezolva ecuaţia , iar perechea obţinută este soluţia sistemului.

Dacă prin această metodă se anulează toţi termenii ce conţin necunoscutele şi termenii liberi, sistemul nu are soluţie unica. Dacă se anulează toţi termenii ce conţin necunoscutele şi termenii liberi nu se anulează, sistemul nu are soluţie.

Fiecare ecuaţie a sistemului este ecuaţia unei drepte $y=\alpha x+\beta$, iar rezolvarea sistemului reprezintă de fapt stabilirea poziţiei relative a două drepte. Interpretarea geometrică a soluţiilor sistemului:

- Drepte concurente - soluţie unică(**sistem compatibil determinat**),
- Drepte confundate - o infinitate de soluţii(**sistem compatibil nedeterminat**),
- Drepte paralele - nici o soluţie(**sistem incompatibil**)

Aplicaţii:

Să se rezolve sistemele (interpretare geometrică):

I. $\begin{cases} x-5y=3 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$

Rezolvare: Metoda reducerii

$$\begin{cases} x-5y=3 \,|\cdot(-2) \\ 2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+10y=-6 \\ \underline{2x+y=-5} \end{cases}$$

$$/ \quad 11y=-11, \; y=-1$$

$x-5(-1)=3, \; x=-2$

Soluţia sistemului este perechea S= (-2,-1), sistem compatibil determinat.

Interpretare geometrică: Rescriem sistemul în forma

$$\begin{cases} x-5y=3 \\ 2x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{x}{5}-\frac{3}{5} \\ y=-2x-5 \end{cases}$$

$d_1: y=\frac{x}{5}-\frac{3}{5}$

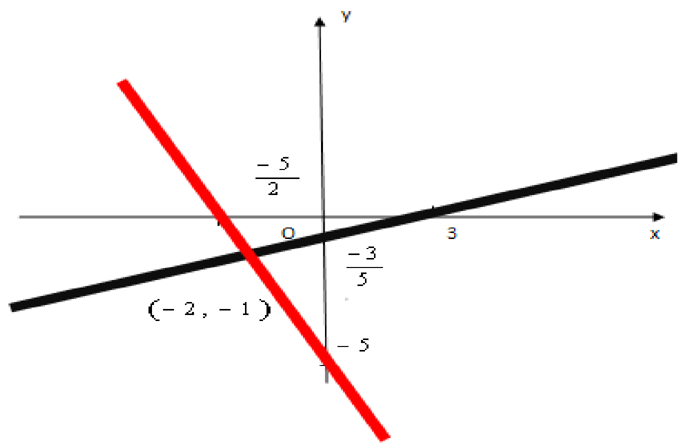
$d_2: y=-2x-5$

Reprezentăm grafic cele două drepte:

$d_1: y=\frac{x}{5}-\frac{3}{5}$. Intersecţia cu axa Ox: y=0$\Rightarrow x=3$. Obţin $A(3,0)$. Intersecţia cu axa Oy: x=0$\Rightarrow y=\frac{-3}{5}$. Obţin $B(0,\frac{-3}{5})$.

$d_2: y=-2x-5$ Intersecţia cu axa Ox: y=0$\Rightarrow x=\frac{-5}{2}$. Obţin $M(\frac{-5}{2},0)$. Intersecţia cu axa Oy: x=0$\Rightarrow y=-5$. Obţin $N(0,-5)$.

Reprezentarea grafică în acelaşi sistem de axe pune în evidenţă soluţia sistemului S= (-2,-1). Dreptele au un singur punct de intersecţie.



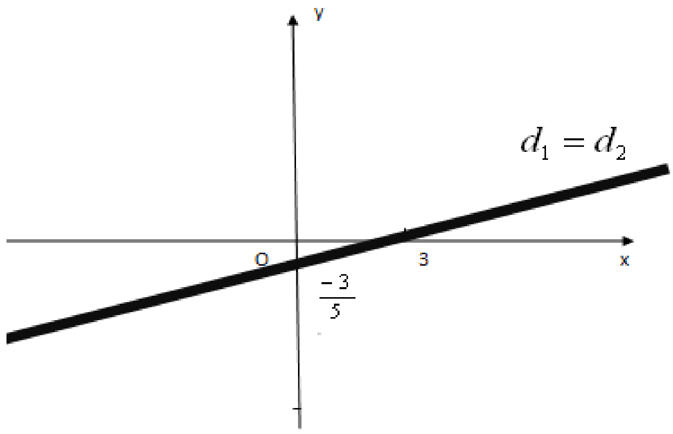
II. $\begin{cases} x-5y=3 \\ 2x-10y=6 \end{cases}$

Se observă că prin împărţirea celei de-a doua ecuaţii cu 2 se obţine prima ecuaţie. Se notează necunoscuta x cu α, $\alpha \in \mathbb{R}$, şi se determină $y=\dfrac{\alpha-3}{5}$.

Sistemul are o infinitate de soluţii, este compatibil nedeterminat, $S=\left\{\left(\alpha,\dfrac{\alpha-3}{5}\right)\right\}, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} d_1: y=\dfrac{x-3}{5} \\ d_2: y=\dfrac{2x-6}{10} \end{cases}$$

Reprezentarea grafică în acelaşi sistem de axe pune în evidenţă soluţia sistemului. Dreptele reprezentate de ecuaţii sunt confundate.

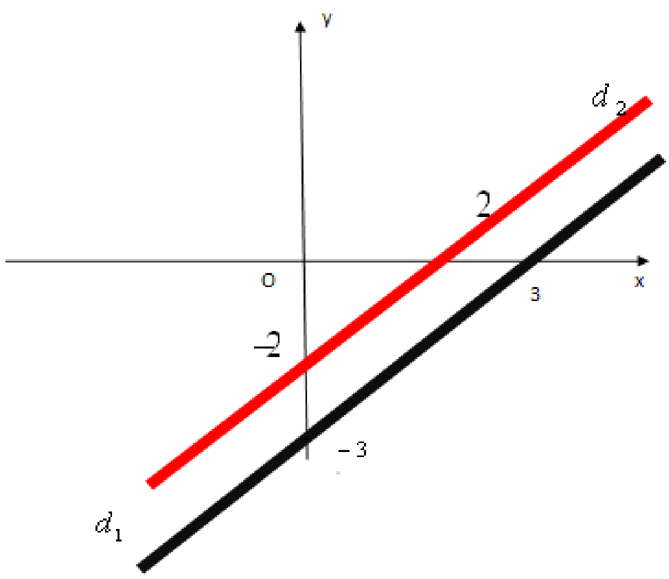


III. $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=4 \end{cases}$

Dacă împărţim a doua ecuaţie cu 2 se obţine că 3=2, ceea ce este fals. Deci sistemul nu are soluţie, este incompatibil.

Dacă împărţim a doua ecuaţie cu 2 se obţine că 3=2, ceea ce este fals. Deci sistemul nu are soluţie, este incompatibil. $\begin{cases} d_1: y=x-3 \\ d_2: y=x-2 \end{cases}$

Reprezentarea grafică în acelaşi sistem de axe pune în evidenţă faptul că dreptele reprezentate de ecuaţii sunt paralele


y
d_2
2
O
x
3
-2
-3
d_1