Fişă de lucru - vectori

1. Se consideră punctele necoliniare A, B, C şi punctele M, N astfel ca $\vec{AM} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \vec{AC}$ şi $\vec{CN} = \frac{4}{7}\vec{CB}$. Verificaţi dacă punctele A, M, N sunt coliniare .

2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, iar P **şi** Q sunt mijloacele segmentelor (MN), respectiv (BC). Dacă PQ este paralelă cu bisectoarea $\hat{A}$, atunci $BM = CN$.

3. Să se arate că pentru orice doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ are loc egalitatea

$$\left|\vec{u} + \vec{v}\right| + \left|\vec{u} - \vec{v}\right| = 2\left(\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2\right).$$

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris în cercul $C(O, R)$, iar M un punct de pe cerc şi H_1, H_2 ortocentrele triunghiurilor MAB şi,respectiv MCD. Demonstraţi că M este mijlocul segmentului (H_1H_2).

5. Se consideră un triunghi *ABC* şi punctele *M* ∈ (*AB*), *N* ∈ (*AC*). Demonstraţi că dacă dreapta *MN* conţine centrul de greutate al triunghiului, atunci $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1.$

Soluţii :

1. $\vec{AN} = \frac{3}{7}\vec{AC} + \frac{4}{7}\vec{AB}$. Se observă că $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{3}{7}}$. Punctele A, M, N sunt coliniare .

2. Din patrulaterul $MNCB$, în care P **şi** Q sunt mijloacele laturilor opuse , rezultă că $\vec{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{MB} + \vec{NC}\right)$. Dar $\vec{MB} = \frac{MB}{AB}\vec{AB}$, iar $\vec{NC} = \frac{NC}{AC}\vec{AC}$.

Dacă $\vec{AD}$ este bisectoarea $\hat{A}$, $D \in (BC)$, atunci cu ajutorul teoremei bisectoarei , $\vec{AD} = \frac{AC}{AB + AC}\vec{AB} + \frac{AB}{AB + AC}\vec{AC}$. Deoarece $PQIIAD$, rezultă că $BM = CN$.

3. Considerăm vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ cu aceeaşi origine A şi alcătuim paralelogramul $ABCD$, cu $\vec{u}=\vec{AB}$ şi $\vec{v}=\vec{AD}$ .Inegalitatea din enunţ devine acum $AC^2+BD^2=2\cdot\left(AB^2+AD^2\right)$. Această egalitate se poate demonstra cu teorema medianei în triunghiul ABD.

4 . Avem $\vec{r}_{H_1}=\vec{r}_M+\vec{r}_A+\vec{r}_B$, iar $\vec{r}_{H_2}=\vec{r}_M+\vec{r}_C+\vec{r}_D$, unde vectorii de poziţie au originea în O.

Dar $ABCD$ dreptunghi cu centrul O, de unde rezultă că $\vec{r}_A+\vec{r}_C=\vec{0}$ şi $\vec{r}_B+\vec{r}_D=\vec{0}$. Atunci

$\vec{r}_{H_1}+\vec{r}_{H_2}=2\vec{r}_M$, de unde rezultă că M este mijlocul segmentului $\left(H_1H_2\right)$.

5. Dacă MN ll BC , atunci $\frac{MB}{MA}=\frac{NC}{NA}=\frac{1}{2}.$ Egalitatea din enunţ este verificată .

În cazul când $MN\cap BC=\{P\}$, folosim teorema lui Menelaus în triunghiurile ABD şi ACD.

Rezultă $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DP}{BP}=1\Rightarrow\frac{MB}{MA}=\frac{BP}{2DP}$

$$\frac{NC}{NA}\cdot\frac{AG}{GD}\cdot\frac{DP}{CP}=1\Rightarrow\frac{NC}{NA}=\frac{CP}{2DP}$$

Dar $BD+CP=2DP$, ceea ce încheie demonstraţia .